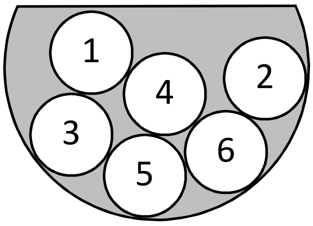
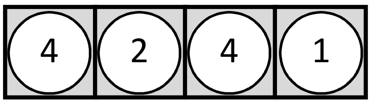
Stochastik – Kombinatorik

1. <u>Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen (Urnenmodell S. 71 oben)</u>



$\leftarrow n$ unterscheidbare Kugeln ⇨ n^k Möglichkeiten

auf $\downarrow k$ Plätze verteilt — Jedes Ergebnis hat $p = \frac{1}{n^k}$



Doppelte sind möglich,
k und n sind unabhängig.

<u>Spezialfall 1: Bernoulli-Experiment</u>

Die n Kugeln sind NICHT ALLE unterscheidbar, sondern s davon sind „Treffer“, der Rest $(n-s)$ „Nieten“. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei einmal Ziehen ist somit p, die Wahrscheinlichkeit für eine Niete ist $q = 1 - p$.

<u>Spezialfall 2: Bernoulli-Kette</u>

Die Wahrscheinlichkeit, k-mal hintereinander einen Treffer zu erzielen, ist p^k. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination aus Treffern & Nieten (mit Beachtung der Reihenfolge!) ist dann z.B. $P(\text{"}TNTTNN\text{"}) = p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q = p^2 q^3$

<u>Spezialfall 3: Binomialverteilung</u>

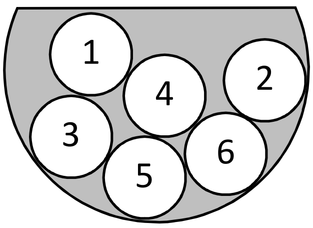
Interessiert uns nur die Wahrscheinlichkeit für das k-fache Auftreten eines Treffers bei n-maligem Ziehen aus einer Urne mit unbekannter Anzahl an Kugeln, aber bekannter Trefferwahrscheinlichkeit p, so müssen wir alle Kombinationen mit gleich vielen Treffern aus Spezialfall 2 zusammenfassen. Wenn k Treffer auf n Plätze verteilt werden können, gibt es dafür $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (siehe 3.). Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer (und somit $(n-k)$ Nieten) ist also $\binom{n}{k}$-mal so hoch wie die einer bestimmten Reihenfolge aus Spezialfall 2.

Somit gilt $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = B(n; p; k)}$

Interessiert einen die Wahrscheinlichkeit für bis zu (=höchstens) k Treffer, also $P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i)$, so findet man diesen Wert im Tafelwerk.

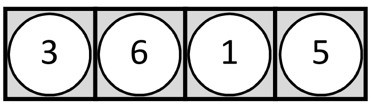
Ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens (=ab) $k + 1$ Treffer gesucht, so arbeitet man mit dem Gegenereignis: $P(X \geq k + 1) = 1 - P(X \leq k)$

2. <u>Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (Urnenmodell S. 71 unten)</u>



$\leftarrow n$ unterscheidbare Kugeln ⇨ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

auf $\downarrow k$ Plätze verteilt — $= \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten



Doppelte sind nicht möglich,
es muss $k \leq n$ sein.

<u>Spezialfall 1: Permutation</u>

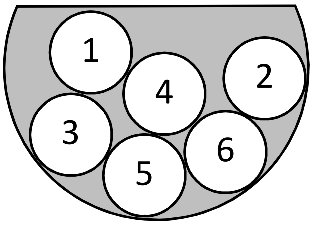
$k = n$, d.h. alle Kugeln werden gezogen und „umsortiert“. ⇨ $\boxed{n!\text{ Möglichkeiten}}$

<u>Spezialfall 2: MISSISSIPPI-Problem</u>

n Kugeln, von denen jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_r$ gleich sind ⇨ $\boxed{\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}\text{ Möglichkeiten}}$

(d.h. die Summe aller n_i muss n ergeben)

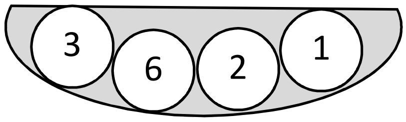
3. Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (Urnenmodell S. 74)



← aus n unterscheidbaren Kugeln

$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten}}$

werden mit einem Griff ↓ k gezogen

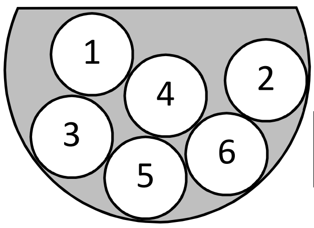


Doppelte sind nicht möglich,
es muss $k \leq n$ sein.

Spezialfall: Urne mit s/w Kugeln

Die Urne enthält N Kugeln, die NICHT ALLE unterscheidbar sind. S sind schwarz, W sind weiß. $N = S + W$. Es werden n Kugeln mit einem Griff (ungeordnet, ohne Zurücklegen) gezogen. Es gäbe $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten, wenn alle Kugeln unterscheidbar wären. Die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Ergebnis wäre also $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. Nun ergeben aber alle $\binom{S}{s}$ Möglichkeiten, die man hat, s von den S schwarzen Kugeln in der Urne zu ziehen, das gleiche Ergebnis.
Es hat also die $\binom{S}{s}$-fache Wahrscheinlichkeit: $\frac{\binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$. Und auch alle $\binom{W}{w}$ Möglichkeiten, w von den W weißen Kugeln in der Urne zu ziehen, resultieren im gleichen Ergebnis.
Die Wahrscheinlichkeit ist also noch $\binom{W}{w}$-mal so groß: $\boxed{P(X = s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}}$

4. Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen (NICHT SCHULSTOFF)



← aus n unterscheidbaren Kugeln

$\boxed{\binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k} \text{ Möglichkeiten}}$

wird ↓ k-mal eine gezogen und notiert:

Kugel	1	2	3	4	5	6
Anzahl	0x	1x	0x	1x	2x	0x

Doppelte sind möglich,
k und n sind unabhängig.

Besser verständlich als Kaninchenstall-Problem:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Kaninchen auf n Ställe zu verteilen?
Wir ziehen für jedes der k Kaninchen eine der n Kugeln; die Nummer gibt an, in welchem Stall es untergebracht wird.

Zustandekommen der Formel:
Denk dir die k Kaninchen in einer Reihe: O O O O .
Die Einteilung in die n Ställe kann durch Einfügen von $(n-1)$ Trennstrichen zwischen die Kaninchen erfolgen, z.B. so |O||O|O O| (für die obige Tabelle) oder so O|O O O|||| .
Es gibt insgesamt $k + (n-1)$ verschiedene Positionen, an denen am Ende Kaninchen oder Trennwände stehen können. Es gibt $\binom{n-1+k}{n-1}$ Möglichkeiten, die Trennstriche auf diese Positionen zu setzen. Auf alle dann noch übrigen Positionen kommt ein Kaninchen. Alternativ kann man auch zuerst die Kaninchen setzen, dafür gibt es $\binom{n-1+k}{k}$ Möglichkeiten. Und diese Zahl ist die gleiche, da die Binomialkoeffizienten symmetrisch sind (z.B. $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ oder $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$).

Aufgabentyp „3-Mindestens-Aufgabe":

geg: p; $P(X \geq 1) \geq P$ / ges: n

Lsg: $1 - P(X = 0) \geq P$

$P(X = 0) \leq 1 - P$

$q^n \leq 1 - P$

$(1-p)^n \leq 1 - P$

$n \geq \log_{(1-p)}(1 - P)$